

文章编号: 1001-0920(2006) 03-0293-04

基于 T-S 模糊模型的复杂系统的灵敏度分析

张 阿 卜

(厦门大学 自动化系, 福建 厦门 361005)

摘 要: 针对输入具有互联的系统的灵敏度分析常常会产生不正确结果的问题, 提出一种获取这种复杂系统灵敏度信息的方法. 这种方法首先需要建立系统的基于自适应神经模糊推理系统的 T-S 模糊模型以及各个输入的 T-S 模糊模型; 然后从这些模糊模型抽取出灵敏度信息. 同时讨论了这种输入具有互联的系统的模糊建模方法. 仿真实例验证了所提出的抽取灵敏度信息方法的正确性.

关键词: 复杂系统; 模糊建模; 灵敏度分析; 输入选择; 自适应神经模糊推理系统

中图分类号: TP13 文献标识码: A

Sensitivity Analysis of Complex Systems Based on T-S Fuzzy Models

ZHANG A-bu

(Department of Automation, Xiamen University, Xiamen 361005, China. E-mail: abzhang@jingxian.xmu.edu.cn)

Abstract: For the complex system with interrelated inputs, a method of extracting sensitivity information is proposed to overcome the wrong results obtained when using existing sensitivity analysis method. This method requires firstly generating T-S fuzzy models of system and each input based on adaptive neuro-fuzzy inference systems (ANFIS) architecture, then sensitivity information is extracted from these fuzzy models. An approach to obtain fuzzy models of the system with interrelated inputs is proposed. Simulation result shows the validity of the proposed method of extracting sensitivity information.

Key words: Complex system; Fuzzy modeling; Sensitivity analysis; Input selection; ANFIS

1 引 言

系统的复杂性特征包括非线性、高维数、不确定性、强耦合等, 而输入变量之间存在着互联关系, 这是系统复杂性的一种体现. 在所遇到的实际问题中, 经常出现输入变量之间存在着互联关系或多重相关性, 增加了系统建模和分析的难度^[1~4]. 众所周知, 模糊系统已广泛应用于复杂系统的建模、仿真、预测和控制. 此外, 利用已经建立的模糊模型还可以获取系统的灵敏度信息^[5]. 灵敏度信息可用于对系统的分析和设计, 特别是用于分析输入变量对系统输出影响的程度, 以及计算系统的优化问题^[5]和输入变量的选择^[6,7]等. 文献[5~7]考虑的都是输入变量之间不存在互联关系的系统, 而文献[8]则比较了输入

变量有无互联关系两种情形下不同的灵敏度计算结果, 但没有对其原因进行分析, 也没有提出解决的办法. 通过对输入变量具有互联关系的系统的分析表明, 忽略这种互联关系的灵敏度分析会得出不正确的结论. 为此, 本文针对输入变量存在互联关系的系统, 提出一种基于 T-S 模糊模型的输出相对于输入的偏导数和输入变量重要度的计算方法, 并用计算实例进行了验证.

2 输入无互联的系统灵敏度计算

2.1 T-S 模糊模型和 ANFIS 结构

考虑如下具有 n 个无互联输入的单输出系统:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{1}$$

假设所建立的是 T-S 型模糊推理系统, 其每个输入

均具有 m 个隶属函数, 则该模糊模型的规则数 $L = m^n$, T-S 型的模糊推理系统的第 l 条规则可表示为

R^l : If x_1 is A_1^l and ... and x_n is A_n^l ,

Then $y^l = p_1^l x_1 + \dots + p_n^l x_n + p_{n+1}^l$.

其中 A_i^l 为模糊集合.

该 T-S 模糊模型可表示为

$$\hat{y} = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2)$$

其输出为

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i. \quad (3)$$

其中: $x_{n+1} = 1$; $a_i = \sum_{l=1}^L w^l p_i^l \backslash \sum_{l=1}^L w^l$; $w^l =$

$\mu_{A_1^l}(x_1) \cdot \mu_{A_n^l}(x_n)$ 为 A_i^l 的隶属函数, 这里取高斯函数

$$\mu_{A_i^l}(x_i) = \exp[-\frac{1}{2}(\frac{x_i - c_i^l}{\sigma_i^l})^2], i = 1, 2, \dots, n.$$

为便于对 T-S 模糊系统的训练, 将其构造成自适应神经模糊推理系统(ANFIS)的结构^[9], ANFIS 的结构分为 5 层.

第 1 层是隶属函数层, 该层的作用是求取输入变量所对应的隶属函数值 $\mu_{A_i^l}(x_i)$.

第 2 层的每一节点是一个标以 的固定节点, 它的输出是所有输入的积, 即

$$w^l = \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i).$$

该层的节点数为规则数 L , 节点的输出表示所对应规则的激励强度 w^l .

第 3 层的每一个节点的输出为 $\bar{w}^l = w^l \backslash \sum_{l=1}^L w^l$.

第 4 层的每一个节点的输出为 $\bar{y}^l = \bar{w}^l y^l$.

第 5 层为输出层, 该层的输出为 $\hat{y} = \sum_{l=1}^L \bar{y}^l$.

针对上述 ANFIS 结构, Jang 提出了一种混合学习算法. 在每一训练步的前半部固定前提参数, 采用最小二乘法对后件参数进行修正; 而在后半部固定后件参数, 采用 BP 算法对前件参数进行修正. 这样交替地对前后件参数进行调整, 经过若干次的训练后, 网络便可以以很高的精度逼近所要建模的系统.

2.2 基于 T-S 模糊模型, 计算输出相对于输入变量的偏导数

根据所获取的输入输出数据对 $[x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k); y(k)]$, $k = 1, \dots, p$, 基于 T-S 模糊可计算输出 \hat{y} 相对于输入变量 x_i 的偏导数. 由式(3)可导出

$$\frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial x_i(k)} = a_i(k) + \sum_{j=1}^{n+1} x_j(k) \frac{\partial a_j(k)}{\partial x_i(k)}. \quad (4)$$

其中

$$\frac{\partial a_j(k)}{\partial x_i(k)} = \frac{1}{b} \frac{\sum_{l=1}^L w^l (p_j^l - a_j) (c_i^l - x_i)}{(\sigma_i^l)^2},$$

$$b = \sum_{l=1}^L w^l.$$

3 具有输入互联的系统灵敏度信息

3.1 输入互联系统及其 T-S 模糊模型的建立

在实际建模工作中, 常常会遇到系统的输入变量之间相互影响、相互关联. 考虑如下输入具有互联的系统:

$$y = f_0(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (5)$$

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_2, x_3, \dots, x_n), \\ x_2 = f_2(x_1, x_3, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \end{cases} \quad (6)$$

对于这样的系统, 如果按上述输入无互联的系统灵敏度信息的计算方法, 则会得出错误的结果. 主要原因在于计算偏导数 $\partial \hat{y} / \partial x_i$ 时忽略了输入变量之间的互联关系. 某个输入变量的变化, 除会直接影响系统的输出外, 还会通过输入变量之间的互联关系间接地影响到系统的输出.

为计算输入互联系统的灵敏度信息, 首先要建立系统以及反映输入变量互联关系的 T-S 模糊模型

$$y = f_0(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (7)$$

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = \hat{f}_1(x_2, x_3, \dots, x_n), \\ \hat{x}_2 = \hat{f}_2(x_1, x_3, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \hat{x}_n = \hat{f}_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \end{cases} \quad (8)$$

设已获得输入输出数据 $[x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k); y(k)]$, $k = 1, \dots, p$, 基于 ANFIS 可以建立系统的 T-S 模糊模型(7) 以及各个输入的 T-S 模糊模型(8). 在建立了模糊模型(7) 和(8) 之后, 便可清楚地揭示系统的各个输入变量之间的关系, 从而正确地反映出系统的各个输入变量对系统输出的影响.

对于实际系统, 所有输入变量并不一定都存在互联关系, 因此在建立模糊模型(8) 过程中, 可能会碰到有的反映某输入变量互联关系的输入模糊模型虽经多步训练后, 模型的均方根误差(RMSE) 仍很大, 这说明该输入变量的互联关系不存在.

实际上, 当模型的输入变量与输出变量存在关系时, 因为在训练模型时采用的是 ANFIS 结构的混合学习算法, 特别是规则结论部分的参数用最小二乘法进行辨识, 因此在训练一步之后会有较小的模型误差^[10], 而且在训练的前几步模型误差会显著衰减. 据此, 便可很容易地在训练模型过程中判断输入变量与输出变量是否存在关系.

3.2 输入互联系统的灵敏度信息计算

在建立了模糊模型 (8) 和 (9) 后, 便可参照式 (4) 计算出 $\hat{g}_m(k)/\hat{\alpha}_i(k)$. 其中: $m = 0, 1, \dots, n, i = 1, 2, \dots, n, i \neq m$. 同时

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_j(k)/\hat{\alpha}_i(k) &= \hat{g}_j(k)/\hat{\alpha}_i(k), \\ j &= 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, n, i \neq j. \end{aligned}$$

输出 \hat{y} 相对于输入变量 x_i 的偏导数为

$$\frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial x_i(k)} = \frac{\partial \hat{f}_0(k)}{\partial x_i(k)} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\partial \hat{f}_0(k)}{\partial x_j(k)} \frac{\partial \hat{x}_j(k)}{\partial x_i(k)},$$
$$i = 1, 2, \dots, n. \tag{9}$$

在此基础上, 定义

$$\begin{aligned} D_i^m &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \left| \frac{\partial \hat{f}_m(k)}{\partial x_i(k)} \right|, \\ S_i^m &= D_i^m / \max_j (D_j^m), \\ m &= 0, 1, \dots, n, i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{10}$$

S_i^m 称为输入变量 x_i 对于模糊模型 m 的输出的局部重要度.

同样可定义

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \left| \frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial x_i(k)} \right|, \\ S_i &= D_i / \max_j (D_j), i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{11}$$

S_i 称为输入变量 x_i 对于系统输出的全局重要度.

由反映输入变量互联关系的 T-S 模糊模型可计算出输入变量 x_i 对于模糊模型 m 输出的局部重要度 S_i^m . 局部重要度越高, 表明该输入变量对模型输出的影响越大. 据此可以对输入变量对模型输出的重要性进行排序. 利用局部重要度还可以简化模型. 如果某一输入变量的局部重要度小于给定的阈值, 则可以在这个模型中删去该输入变量.

利用全局重要度可以对输入变量对系统输出的重要性进行排序, 从而进行输入变量的选择. 计算出的输出 \hat{y} 相对于输入变量 x_i 的偏导数可用于求解系统的优化问题^[6].

4 仿真实例

仿真对象为^[8]

$$y = ((x_1 + 2)^{1.5} + \sin(2\pi x_2))^2. \tag{12}$$

系统的输入变量有 $x_1, x_2, x_3, x_1, x_2 \in [0, 1], x_3 = 1 - x_1^2$. 这是一个输入具有互联的系统, 且有

$$\begin{aligned} \partial y / \partial x_1 &= 3y_1(x_1 + 2)^{0.5}, \\ \partial y / \partial x_2 &= 4\pi y_1 \cos(2\pi x_2), \\ \partial y / \partial x_3 &= -1.5y_1(x_1 + 2)^{-0.5}/x_1, \\ y_1 &= (x_1 + 2)^{1.5} + \sin(2\pi x_2). \end{aligned}$$

试验时 x_1, x_2 取均匀分布的随机数, 由式 (12) 及 $x_3 = 1 - x_1^2$ 得到 800 对训练数据, 每个模型的输入变量均取 7 个隶属函数, 利用 ANFIS 建立 4 个 T-S 模糊模型

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \hat{f}_0(x_1, x_2, x_3), \hat{x}_1 = \hat{f}_1(x_2, x_3), \\ \hat{x}_2 &= \hat{f}_2(x_1, x_3), \hat{x}_3 = \hat{f}_3(x_1, x_2). \end{aligned}$$

图 1 和图 2 分别为训练模糊模型 $x_1 = \hat{f}_1(x_2, x_3)$ 和 $x_2 = \hat{f}_2(x_1, x_3)$ 过程中均方根误差的变化曲线. 在建立模糊模型 $x_2 = \hat{f}_2(x_1, x_3)$ 时, 经多次训练仍得不到小的模型误差 (RMSE = 0.226 45), 因此认为 x_2 与其他输入变量没有关联. 由建立后的模糊模型 $x_1 = \hat{f}_1(x_2, x_3)$ 和 $x_3 = \hat{f}_3(x_1, x_2)$ 可以得到 $S_2^1 = 0.004\ 0, S_3^1 = 1.000\ 0$ 以及 $S_1^3 = 1.000\ 0, S_2^3 = 0.001\ 1$. 可见 x_2 对模型输出 x_1, x_3 的局部重要度很低, 因此可以在这两个模型中删除 x_2 . 最终得到整个系统的 T-S 模糊模型为

$y = \hat{f}_0(x_1, x_2, x_3), \hat{x}_1 = \hat{f}_1(x_3), \hat{x}_3 = \hat{f}_3(x_1)$. 根据式 (11) 重要度定义, 可得到变量 x_1, x_2, x_3 对系统输出的全局重要度为

$S_1 = 0.632\ 8, S_2 = 1.000\ 0, S_3 = 0.592\ 8$. 虽然所得到的模糊模型 $y = \hat{f}_0(x_1, x_2, x_3)$ 具有较高的精度 (RMSE = 0.00468), 但仅根据该模型

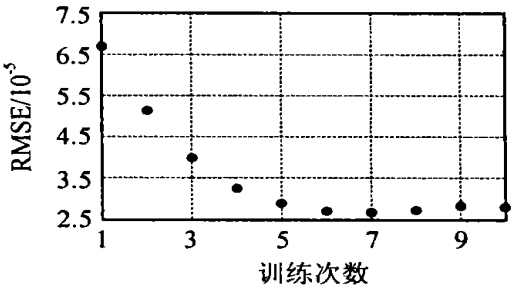


图 1 模型 \hat{f}_1 训练过程中均方根误差变化曲线

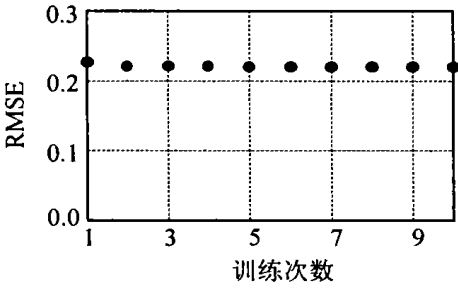


图 2 模型 \hat{f}_2 训练过程中均方根误差变化曲线

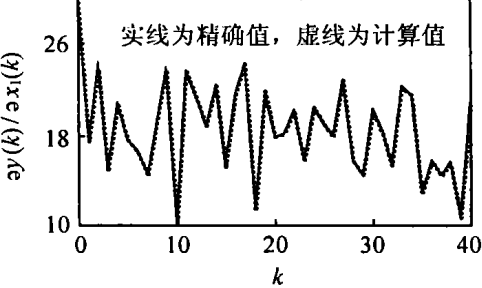


图 3 考虑输入互联时的计算结果

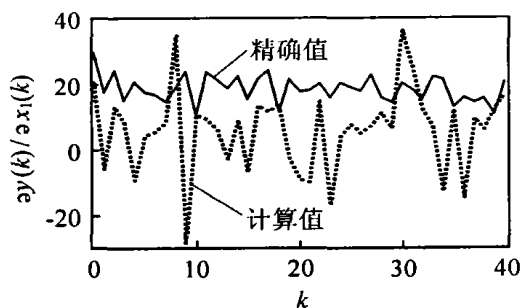


图 4 不考虑输入互联时的计算结果

计算灵敏度信息仍然会得出错误的结果. 图 3 中的 $\partial y / \partial x_1$ 是按本文方法根据式(9) 计算出来的, 图 4 的结果则忽略了输入互联, 显然有很大的误差.

5 结 语

本文提出了一种建立输入具有互联的系统的 T-S 模型的方法. 从这些模型可以清晰地揭示出系统的各个输入变量之间的关系, 并能正确地获取系统的灵敏度信息. 仿真结果表明, 对于输入具有互联的系统, 忽略输入变量互联所得到的偏导数往往会有较大的误差, 同时验证了所提出方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] 王惠文. 偏最小二乘回归方法及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.
(Wang H W. *Partial Least Squares Regression Method and Application*[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2000.)
- [2] Yoo C K, Vanrolleghem P A, Lee I. Nonlinear Modeling and Adaptive Monitoring with Fuzzy and Multivariate Statistical Methods in Biological

Wastewater Treatment Plants[J]. *J of Biotechnology*, 2003, 105(2): 135-163.

- [3] Drechsler M. Sensitivity Analysis of Complex Model [J]. *Biological Conservation*, 1998, 86(3): 401-412.
- [4] Yuan B, Wang X Z, Morris T. Software Analyser Design Using Data Mining Technology for Toxicity Prediction of Aqueous Effluents [J]. *Water Management*, 2000, 20(8): 677-686.
- [5] Rashid K, Ramirez J A, Freeman E M. A General Approach for Extracting Sensitivity Analysis from Neuro-fuzzy Model [J]. *IEEE Trans on Magnetics*, 2000, 36(4): 1066-1070.
- [6] Rashid K, Ramirez J A, Freeman E M. Optimization of Electromagnetic Devices Using Sensitivity Information from Clustered Neuro-fuzzy Models [J]. *IEEE Trans on Magnetics*, 2001, 37(5): 3575-3578.
- [7] Gaweda A E, Zurada J M, Setiono R. Input Selection in Data-driven Fuzzy Modeling [A]. *Proc of the 10th IEEE Int Conf on Fuzzy Systems*[C]. Melbourne, 2001: 1251-1254.
- [8] Sung A H, Lin J. Performance Comparison of Neural Network Models for Engineering Problems [A]. *Proc of the 1997 IEEE Int Conf on Systems, Man, and Cybernetics*[C]. Florida, 1997: 3319-3324.
- [9] Jang J-S R. ANFIS: Adaptive-network-based Fuzzy Inference Systems [J]. *IEEE Trans Systems, Man, and Cybernetics*, 1993, 23(3): 665-685.
- [10] Jang J-S R. Input Selection for ANFIS Learning [A]. *Proc of the 5th IEEE Int Conf on Fuzzy Systems*[C]. Louisiana, 1996: 1493-1499.

(上接第 292 页)

- [4] 刘殿通, 易建强, 谭民. 一类非线性系统的自适应滑模模糊控制 [J]. 自动化学报, 2004, 30(1): 143-150.
(Liu D T, Yi J Q, Tan M. Adaptive Sliding Mode Control for a Class of Nonlinear System [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(1): 143-150.)
- [5] Amel Ouezri, Nabil Derbel. On the Intelligent Control of a Rotary Crane: Neural Network and Fuzzy Logic Approaches [A]. *Int Symposium on Intelligent Control Proc of the 2002 IEEE* [C]. Vancouver, 2002: 586-591.
- [6] Sakawa Y, Shindo Y. Optimal Control of Container

Cranes [J]. *Automatica*, 1981, 18(3): 257-266.

- [7] 李洪兴. 模糊控制的数学本质与一类高精度模糊控制器的设计 [J]. 控制理论与应用, 1997, 14(6): 868-876.
(Li H X. Mathematical Essence of Fuzzy Control and Design of a Kind of High Precision Controller [J]. *Control Theory and Application*, 1997, 14(6): 868-876.)
- [8] 李洪兴, 苗志宏, 王加银. 非线性系统的变论域自适应模糊控制 [J]. 中国科学(E 辑), 2002, 32(2): 211-223.
(Li H X, Miao Z H, Wang J Y. Variable Universe Stable Adaptive Fuzzy Control of Nonlinear System [J]. *Science in China (Series E)*, 2002, 32(2): 211-223.)